RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2000

Concours en Mathématiques et Physique

Épreuve de Mathématiques II

Durée : 3H00 Date : 9 Juin 2000 8Heure Nb pages : [illegible]

Barème : Partie I : 5.5pts Partie II : 4.5pts. Partie III : 6.5pts Partie IV : 3.5pts

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Pour la suite $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on désigne par u^* l'adjoint de u relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Un endomorphisme u est dit symétrique ou autoadjoint si $u^* = u$. Un endomorphisme u symétrique est dit positif si $\langle u(x), x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$. On notera par: $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes symétriques et $\mathcal{S}^+(E)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes symétriques positifs. On rappelle qu'un endomorphisme est symétrique ssi il est diagonalisable dans une base orthonormée. On convient de noter par Id l'endomorphisme identité de E, $uv = u \circ v$ si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et par $u^m = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{m \text{ fois}}$ pour tout entier non nul m et par $u^0 = \mathrm{Id}$. L'orthogonal d'un sous-espace F sera noté $F^\perp$.

NB : La partie IV pourra être traitée indépendamment des autres parties.

Partie I

Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. a) Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = (\mathrm{Im}\ u^*)^\perp$ et $\mathrm{Ker}\ u^* = (\mathrm{Im}\ u)^\perp$.

   b) En déduire que $\dim \mathrm{Ker}\ u = \dim \mathrm{Ker}\ u^*$ et que u et u^* ont le même rang.

2. a) Montrer que $\mathrm{Ker}\ u^* = \mathrm{Ker}\ uu^*$ et $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ uu^*$.

   b) En déduire que $\dim \mathrm{Ker}\ uu^* = \dim \mathrm{Ker}\ u^*u$.